Capes Agricole
Première épreuve
2004

– I – Opérateurs de rang fini

1.

(a) Si $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k g_k = 0$, alors le polynôme $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k X^k$ a une infinité de racines (les e^t pour $t \in [0,1]$), c'est donc le polynôme nul, et les λ_k sont tous nuls. Le système $(g_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est donc libre dans E et Vect $\{g_k \mid k \in \mathbb{N}^*\}$ est de dimension infinie.

(b) Comme Vect $\{g_k \mid k \in \mathbb{N}^*\}$ = Vect $\left\{f\left(\frac{1}{k} g_k\right) \mid k \in \mathbb{N}^*\right\} \subset f(E)$, on déduit que f n'est pas de rang fini.

2. On note n le degré de B. Si $n = 0$, alors $f = 0$ est bien dans $\mathcal{F}(E)$. On suppose que $n \geq 1$.

(a) De l'unicité du reste et du quotient dans la division euclidienne, on déduit que f est linéaire de E dans E.

(b) Comme $f(E) = \mathbb{R}_{n-1}[X]$, f est dans $\mathcal{F}(E)$.

3.

(a) L'endomorphisme nul est dans $\mathcal{F}(E)$. Pour $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et u, v dans $\mathcal{F}(E)$, on a $(\lambda u)(E) = f(E)$ et $(u+v)(E) \subset u(E) + v(E)$. Il en résulte que λu et $u+v$ sont dans $\mathcal{F}(E)$. Donc $\mathcal{F}(E)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.

(b) Soit (u, v) dans $\mathcal{F}(E) \times \mathcal{L}(E)$. Avec $(u \circ v)(E) \subset u(E)$, on déduit que $u \circ v$ est dans $\mathcal{F}(E)$. En désignant par $(y_k)_{1\leq k\leq n}$ une base de $u(E)$, on a $(v \circ u)(E) \subset$ Vect $\{v(y_k) \mid 1 \leq k \leq n\}$ et donc $v \circ u \in \mathcal{F}(E)$.
Ce résultat se traduit en disant que $\mathcal{F}(E)$ est un idéal bilatère de $\mathcal{L}(E)$.

(c) Par définition $Id_E \in \mathcal{F}(E) \Leftrightarrow E = Id_E(E)$ de dimension finie.

(d) Si $\mathcal{F}(E) = \mathcal{L}(E)$ alors $Id_E \in \mathcal{F}(E)$ et E est de dimension finie. La réciproques est évidente.

4. Pour tout $y \in f(E)$, on a $f_1(y) = f(y) \in f(E)$. Donc f_1 est bien dans $\mathcal{L}(f(E))$.

(a) Par définition, on a :

$$\begin{cases} f(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i \ (1 \leq j \leq n) \\ f\left(e'_j\right) = \sum_{i=1}^{n} a'_{ij} e'_i \ (1 \leq j \leq n) \\ e'_j = \sum_{i=1}^{n} p_{ij} e_i \ (1 \leq j \leq n) \end{cases}$$

ce qui entraîne :

$$\begin{cases} f\left(e'_j\right) = \sum_{i=1}^{n} a'_{ij} \sum_{k=1}^{n} p_{ki} e_k = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} p_{ki} a'_{ij}\right) e_k \ (1 \leq j \leq n) \\ f\left(e'_j\right) = \sum_{i=1}^{n} p_{ij} f(e_i) = \sum_{i=1}^{n} p_{ij} \sum_{k=1}^{n} a_{ki} e_k = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ki} p_{ij}\right) e_k \ (1 \leq j \leq n) \end{cases}$$

et donc :

$$\left(PA'\right)_{kj} = \sum_{i=1}^{n} p_{ki} a'_{ij} = \sum_{i=1}^{n} a_{ki} p_{ij} = (AP)_{kj} \ (1 \leq k, j \leq n)$$

ce qui signifie que $PA' = AP$ ou encore $A' = P^{-1}AP$.

(b) Les matrices $A - zI_n$ et $A' - zI_n$ étant semblables pour tout $z \in \mathbb{C}$, elles ont même déterminant.

– II – Inversibilité de $Id_E - f$

1. La restriction g de $Id_E - f$ à $f(E)$ est dans $\mathcal{L}(f(E))$ de noyau $\ker(g) = f(E) \cap \ker(Id_E - f) = \{0\}$, c'est donc un automorphisme de $f(E)$ puisque cet espace est de dimension finie. Sa matrice $I_n - A$ dans $\mathcal{B}$ est donc inversible.
2. Pour tout $y \in E$, $f(y) \in f(E)$ s'écrit de manière unique $f(y) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i e_i$ (les $\beta_i \in \mathbb{K}$ dépendant de y). L'application g étant un automorphisme de $f(E)$, il existe un unique $z = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$ dans $f(E)$ tel que $g(z) = f(y)$, ce qui équivaut à :
$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i = z = f(y) + f(z) = \sum_{i=1}^{n} \left(\beta_i + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\alpha_j \right) e_i$$
ou encore à :
$$\beta_i + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\alpha_j = \alpha_i \ (1 \leq i \leq n)$$
les coefficients α_i étant uniquement déterminés.
On peut aussi dire que le système linéaire :
$$\alpha_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\alpha_j = \beta_i \ (1 \leq i \leq n)$$
de matrice $I_n - A$ qui est inversible a une unique solution $\alpha = (\alpha_i)_{1 \leq i \leq n}$.
3. Soit $y \in E$. L'existence et l'unicité d'une solution z dans $f(E)$ de l'équation $(Id_E - f)(u) = f(y)$ est déjà prouvée en **II.2.** Le vecteur $x = y + z \in E$ vérifie alors l'équation :
$$(Id_E - f)(x) = y - f(y) + f(y) = y.$$

Si $t \in E$ est une autre solution de cette équation, $t - x$ est alors dans $\ker(Id_E - f) = \{0\}$, ce qui prouve l'unicité dans E. On a donc ainsi montré que $Id_E - f$ est un automorphisme de E.

– III – Résolution d'une équation intégrale

1. Pour tout $x \in E$, l'application $(t, s) \mapsto (t - s)x(s)$ est continue sur $[0, 1]^2$ et l'intégration se faisant sur un compact, on déduit que $f(x)$ est bien dans E.
   (a) Par linéarité de l'intégrale on déduit que f est linéaire et pour tout $x \in E$, on a :
   $$f(x)(t) = -\int_0^1 sx(s)\,ds + \left(\int_0^1 x(s)\,ds \right) t = \beta_1 + \beta_2 t$$
   soit $f(x) = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2$, avec $(\beta_1, \beta_2) \in \mathbb{R}^2$, les fonctions e_1 et e_2 étant linéairement indépendantes dans E. Il en résulte que $f(E)$ est de dimension 2 et $f \in \mathcal{F}(E)$.
   (b) On a :
   $$f(e_1)(t) = \int_0^1 (t - s)\,ds = t - \frac{1}{2},\ f(e_2)(t) = \int_0^1 (t - s)\,sds = \frac{t}{2} - \frac{1}{3}$$
   soit :
   $$f(e_1) = -\frac{1}{2}e_1 + e_2,\ f(e_2) = -\frac{1}{3}e_1 + \frac{1}{2}e_2$$
   et $f(x) = x$ équivaut à :
   $$x = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 = -\left(\frac{\beta_1}{2} + \frac{\beta_2}{3} \right) e_1 + \left(\beta_1 + \frac{\beta_2}{2} \right) e_2$$
   encore équivalent à $\beta_1 = \beta_2 = 0$. On a donc $\ker(Id_E - f) = \{0\}$.

2.

(a) Déjà vu en **III.1.a.**

(b) En **III.1.b.** on a vu que $A = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$. On sait déjà d'après **II.1.** que $I_2 - A$ est inversible, ce qui se vérifie avec $\det(I_2 - A) = \frac{13}{12}$. L'inverse de $I_2 - A$ est $\frac{1}{13}\begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 12 & 18 \end{pmatrix}$.

(c) D'après ce qui précède, pour tout $y \in E$, si $f(y) = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2$ alors la solution de (1) est $x = y + \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2$ où (α_1, α_2) est solution de $(I_2 - A)\alpha = \beta$, soit :

$$\begin{cases} \frac{3}{2}\alpha_1 + \frac{1}{3}\alpha_2 = \beta_1 \\ -\alpha_1 + \frac{1}{2}\alpha_2 = \beta_2 \end{cases}$$

ce qui donne :

$$\begin{cases} \alpha_1 = \frac{2}{13}(3\beta_1 - 2\beta_2) \\ \alpha_2 = \frac{6}{13}(2\beta_1 + 3\beta_2) \end{cases}$$

et donc :

$$x = y + \frac{2}{13}(3\beta_1 - 2\beta_2)e_1 + \frac{6}{13}(2\beta_1 + 3\beta_2)e_2$$

ou encore :

$$x(t) = y(t) + \frac{2}{13}(3\beta_1 - 2\beta_2) + \frac{6}{13}(2\beta_1 + 3\beta_2)t$$

avec :

$$\beta_1 = -\int_0^1 sy(s)\,ds,\ \beta_2 = \int_0^1 y(s)\,ds.$$

(d) Pour $y(t) = t^2$, on a :

$$\begin{cases} \beta_1 = -\int_0^1 s^3 ds = -\frac{1}{4},\ \beta_2 = \int_0^1 s^2 ds = \frac{1}{3}, \\ x(t) = t^2 + \frac{1}{13}\left(3t - \frac{17}{6}\right). \end{cases}$$

– IV – Valeurs propres d'un opérateurs de rang fini

1. Si pour $f \in \mathcal{F}(E)$, 0 n'est pas valeur propre de f, alors f est injective et réalise un isomorphisme de E sur $f(E)$, ce qui impose que E est de dimension finie.
Donc pour E de dimension infinie, 0 est valeur propre de tout $f \in \mathcal{F}(E)$.

2.

(a) Dire que $\lambda \in \mathbb{C}^*$ est valeur propre de f équivaut à dire qu'il existe $x \in E \setminus \{0\}$ tel que $f(x) = \lambda x$. On a alors $x = f\left(\frac{1}{\lambda}x\right) \in f(E)$ et x est aussi vecteur propre de $f_1 \in \mathcal{L}(f(E))$ associé à la valeur propre λ. Réciproquement il est clair qu'une valeur propre de f_1 est également valeur propre de f. Comme A est la matrice de f_1 dans $\mathcal{B}$, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}^*$, on a :

$$\lambda \text{ valeur propre de } f \Leftrightarrow \lambda \text{ valeur propre de } f_1 \Leftrightarrow \lambda \text{ valeur propre de } A,$$

ce qui peut aussi s'écrire :

$$\lambda \text{ valeur propre de } f \Leftrightarrow (-\lambda)^n \det\left(I_n - \frac{1}{\lambda}A\right) = \det(A - \lambda I_n) = 0$$

ou encore :

$$\lambda \in \mathbb{C}^* \text{ valeur propre de } f \Leftrightarrow I_n - \frac{1}{\lambda}A \text{ inversible.}$$

(b) Pour $\rho \in \mathbb{C}^*$, dire $\dfrac{1}{\rho}$ n'est pas valeur propre de f équivaut à dire que

$\ker(Id_E - \rho f) = \ker\left(f - \dfrac{1}{\rho} Id_E\right) = \{0\}$, ce qui implique que $Id_E - \rho f$ est inversible d'après **II.3.** (ρf est dans $\mathcal{F}(E)$ puisque c'est un espace vectoriel).
On a déjà vu que les valeurs propres non nulles de f sont les racines non nulles du polynôme caractéristique de A.

3.

(a) Les valeurs propres de f sont 0 (E est de dimension infini puisqu'il contient les e^{nt}, et f est de rang 2) et celles de $A = \dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$, à savoir $\lambda = -i\dfrac{\sqrt{3}}{6}$ et $\mu = i\dfrac{\sqrt{3}}{6}$.

(b) Dire que $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k = 0$ équivaut à $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \left(e^{2ik\pi t} + e^{-2ik\pi t}\right) = 0$, ce qui implique que le polynôme $P(X) = X^n \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \left(X^k + \dfrac{1}{X^k}\right)$ a une infinité de racines (les $e^{2i\pi t}$ pour $t \in [0,1]$), c'est donc le polynôme nul, et les λ_k sont tous nuls. Le système $(x_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est donc libre dans E et l'espace vectoriel $H = \text{Vect}\{x_k \mid k \in \mathbb{N}^*\}$ est de dimension infinie.

(c) Pour tout $n \geq 1$, on a :

$$f(x_n)(t) = \int_0^1 (t-s)\cos(2n\pi s)\, ds = 0$$

donc $H \subset \ker(f)$ et $\ker(f)$ est de dimension infinie.

4.

(a) Si $\lambda \in \mathbb{C}$ est une valeur propre de f et $x \in E \setminus \{0\}$ un vecteur propre associé, avec :

$$\lambda \|x\|^2 = (f(x) \mid x) = (x \mid f(x)) = \overline{\lambda}\|x\|^2,$$

on déduit que $\lambda = \overline{\lambda}$ ($\|x\| \neq 0$), c'est-à-dire que λ est réel.

(b) Pour $i \neq j$ et $(x,y) \in E_{\lambda_i} \times E_{\lambda_j}$, on a :

$$\lambda_i (x \mid y) = (f(x) \mid y) = (x \mid f(y)) = \lambda_j (x \mid y)$$

(λ_j est réel), soit $(\lambda_i - \lambda_j)(x \mid y) = 0$ avec $\lambda_i \neq \lambda_j$, ce qui équivaut à dire que x et y sont orthogonaux. On a donc $E_{\lambda_i} \perp E_{\lambda_j}$.

5.

(a) De manière générale tout sous espace de dimension finie d'un espace hermitien (ce qui est le cas de $f(E)$) admet un supplémentaire orthogonal. Ce résultat se déduit du théorème de projection orthogonale.

(b) Pour $(x,y) \in f(E)^\perp \times f(E)$, on a :

$$(f(x) \mid f(y)) = (x \mid f(f(y))) = 0$$

puisque $(x, f(f(y)))\, f(E)^\perp \times f(E)$. On a donc $f(x) \in f(E)^\perp$. L'espace $f(E)^\perp$ est donc stable par f.

(c) Pour tout $t \in f(E)^\perp$, on a :

$$\|f(t)\|^2 = (f(t) \mid f(t)) = (t \mid f(f(t))) = 0$$

et $t \in \ker(f)$. On a donc $f(E)^\perp \subset \ker(f)$.

(d) Pour $(t,u) \in \ker(f) \times E$, on a :

$$(t \mid f(u)) = (f(t) \mid u) = 0$$

et $t \in f(E)^\perp$. On a donc $\ker(f) \subset f(E)^\perp$ et $f(E)^\perp = \ker(f)$. Il en résulte que :

$$E = f(E) \overset{\perp}{\oplus} f(E)^\perp = f(E) \overset{\perp}{\oplus} \ker(f)$$

et $\ker(f)$ est de dimension infinie.

6. On a déjà vu en **IV.2.a.** que les valeurs propres non nulles de g $(= f_1)$ sont celles de f, soit les λ_i pour i compris entre 1 et p. Avec $\ker(g) = f(E) \cap \ker(f) = \{0\}$, on déduit que 0 n'est pas valeur propre de g. En définitive, les valeurs propres de g sont les λ_i pour i compris entre 1 et p.
On a $F = \bigoplus_{i=1}^{p} E_{\lambda_i} \subset f(E)$ et en désignant par $F^{\perp}$ l'orthogonal de F dans $f(E)$, c'est-à-dire l'ensemble des $x \in f(E)$ orthogonaux à tous les E_{λ_i}, on a $f(E) = F \oplus F^{\perp}$ (on est en dimension finie). On vérifie facilement que $F^{\perp}$ est stable par f (en effet, si $x \in F^{\perp}$ et $y \in E_{\lambda_i}$, on a $(f(x) \mid y) = (x \mid f(y)) = \lambda_i (x \mid y) = 0$), donc si $F^{\perp} \neq \{0\}$ la restriction h de f à $F^{\perp}$ admet une valeur propre λ qui est aussi une valeur propre de g, c'est donc l'un des λ_i et tout vecteur propre associé non nul est dans $F^{\perp} \cap E_{\lambda_i} = \{0\}$, ce qui est absurde. On a donc $F^{\perp} = \{0\}$ et $f(E) = \bigoplus_{i=1}^{p} E_{\lambda_i}$, ce qui compte tenu de ce qui précède donne $E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_{\lambda_i} \oplus \ker(f)$.
En désignant, pour tout i compris entre 1 et p, par $\mathcal{B}_i$ une base orthonormée de E_{λ_i}, la réunion $\mathcal{B} = \bigcup_{i=1}^{p} \mathcal{B}_i$ est une base orthonormée de $f(E)$ formée de vecteurs propres de g. On peut noter $\mathcal{B} = (\varepsilon_i)_{1 \leq i \leq n}$ avec $f(\varepsilon_i) = \mu_i \varepsilon_i$, les μ_i étant des réels tous non nuls.

– V – Alternative de Fredholm pour un opérateur de rang fini

On suppose que E est de dimension infinie.

1.

(a) Si $\rho \in \mathbb{R}^*$ est tel que $\dfrac{1}{\rho}$ n'est pas valeur propre de f, alors $Id_E - \rho f$ est un isomorphisme (question **IV.2.b.**) et pour tout $y \in E$ il existe un unique $x \in E$ tel que $x - \rho f(x) = y$.

(b) Le vecteur $x_0 - y = f(\rho x_0)$ étant dans $f(E)$ de base orthonormée $\mathcal{B} = (\varepsilon_i)_{1 \leq i \leq n}$, il s'écrit de manière unique $x_0 - y = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varepsilon_i$, les coefficients α_k étant donnés par :

$$\alpha_k = (x_0 - y \mid \varepsilon_k) = (x_0 \mid \varepsilon_k) - (y \mid \varepsilon_k) \ (1 \leq k \leq n).$$

De plus avec :

$$f(x_0) - f(y) = f(x_0 - y) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(\varepsilon_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu_i \varepsilon_i,$$

on déduit que :

$$\alpha_k \mu_k = (f(x_0) - f(y) \mid \varepsilon_k) = (f(x_0) \mid \varepsilon_k) - (f(y) \mid \varepsilon_k) \ (1 \leq k \leq n).$$

(c) En tenant compte de $x_0 - y = \rho f(x_0)$ et en utilisant le fait que f est hermitien, on a pour tout k compris entre 1 et n :

$$\begin{aligned} \alpha_k = (x_0 - y \mid \varepsilon_k) &= \rho (f(x_0) \mid \varepsilon_k) = \rho (x_0 \mid f(\varepsilon_k)) \\ &= \rho (x_0 \mid \mu_k \varepsilon_k) = \rho \mu_k (x_0 \mid \varepsilon_k) \end{aligned}$$

soit $(1 - \rho\mu_k)(x_0 \mid \varepsilon_k) = (y \mid \varepsilon_k)$. Comme $\dfrac{1}{\rho}$ n'est pas valeur propre de f, on a $1 - \rho\mu_k \neq 0$ et $(x_0 \mid \varepsilon_k) = \dfrac{1}{1 - \rho\mu_k} (y \mid \varepsilon_k)$.

(d) Pour tout k compris entre 1 et n, on a, en notant $\gamma = \dfrac{1}{\rho}$:

$$\begin{aligned} \alpha_k = (x_0 \mid \varepsilon_k) - (y \mid \varepsilon_k) &= \left(\frac{1}{1 - \rho\mu_k} - 1 \right) (y \mid \varepsilon_k) \\ &= \frac{\rho\mu_k}{1 - \rho\mu_k} (y \mid \varepsilon_k) = \frac{\mu_k}{\gamma - \mu_k} (y \mid \varepsilon_k). \end{aligned}$$

2.

(a) Résulte de $E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_{\lambda_i} \oplus \ker(f)$.

(b) Avec les notations précédentes, pour tout $x = \sum_{i=1}^{p} x'_i + x'' \in E$, on a :

$$f(x) = \sum_{i=1}^{p} f\left(x'_i\right) + f\left(x''\right) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x'_i$$

et $x - \rho f(x) = y$ équivaut à $\sum_{i=1}^{p} (1 - \rho\lambda_i) x'_i + x'' = \sum_{i=1}^{p} y'_i + y''$ encore équivalent à $(1 - \rho\lambda_i) x'_i = y'_i$ pour tout i compris entre 1 et p, et $x'' = y''$ du fait de l'unicité de l'écriture.

(c) Si $\rho\lambda_k = 1$ et $x \in E$ est solution de (3), on déduit alors des conditions précédentes que $y'_k = 0$, ce qui équivaut à dire que y est dans $E_{\lambda_k}^{\perp} = \bigoplus_{i=1,\ i\neq k}^{p} E_{\lambda_i} \oplus \ker(f)$ (la somme directe $E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_{\lambda_i} \oplus \ker(f)$ est orthogonale).

(d) On suppose que $\rho\lambda_k = 1$ et $y \in E_{\lambda_k}^{\perp}$. On a donc $1 - \rho\lambda_i \neq 0$ pour tout $i \neq k$.

i. On vérifie facilement que $x'_0 = \sum_{i=1,\ i\neq k}^{p} \frac{1}{1-\rho\lambda_i} y'_i + y'' \in E_{\lambda_k}^{\perp}$ est solution de (3) (on a $f(y'_i) = \lambda_i y'_i$ et $f(y'') = 0$). Si $x_1 \in E_{\lambda_k}^{\perp}$ est une autre solution de (3), le vecteur $x_1 - x_0$ est dans $E_{\lambda_k} \cap E_{\lambda_k}^{\perp}$ est c'est nécessairement le vecteur nul. D'où l'existence et l'unicité d'une solution de (3) dans $E_{\lambda_k}^{\perp}$.

ii. Si $x \in E$ est une solution de (3), le vecteur $x - x_0$ est dans E_{λ_k} et réciproquement pour tout $x' \in E_{\lambda_k}$, le vecteur $x_0 + x'$ est solution de (3) puisque $x' \in \ker(Id_E - \rho f)$.

– VI – Un exemple d'application

1. On vérifie comme en **III.1.** que f est un opérateur linéaire de rang 2.
Avec le théorème de Fubini et $\overline{f(y)} = f(\overline{y})$ pour tout $y \in E$, on déduit que pour tout $x \in E$ on a :

$$\begin{aligned}(f(x) \mid y) &= \int_0^1 \left(\int_0^1 (t+s)\, x(s)\, ds\right) \overline{y(t)} dt = \int_0^1 \left(\int_0^1 (t+s)\, \overline{y(t)} dt\right) x(s)\, ds \\ &= \int_0^1 \overline{f(y)}(s)\, x(s)\, ds = (x \mid f(y)),\end{aligned}$$

on déduit que f est hermitien.
En notant $e_1(t) = 1$ et $e_2(t) = t$, on a :

$$f(e_1)(t) = \int_0^1 (t+s)\, ds = t + \frac{1}{2},\ f(e_2)(t) = \int_0^1 (t+s)\, s ds = \frac{t}{2} + \frac{1}{3}$$

et la matrice de la restriction de f à $f(E)$ est $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$. Les valeurs propres non nulles de f sont celles de A, soit $\lambda_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{3}$ et $\lambda_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3}$.
La droite propre E_{λ_1} est définie par l'équation $-\sqrt{3}\alpha + \beta = 0$, un vecteur directeur unitaire étant donné par $x_1(s) = 1 + \sqrt{3}s$. Le vecteur $x_2(s) = 1 - \sqrt{3}s$ qui est orthogonal à x_1 (on vérifie que $\int_0^1 x_1(s)\, x_2(s)\, ds = 0$) dirige l'autre droite propre E_{λ_2}. Le système (x_1, x_2) constitue alors une base orthogonale de $f(E) = E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2}$.

2. Pour $y(t) = t^2$, on a :

$$\begin{cases} (y \mid x_1) = \displaystyle\int_0^1 s^2 \left(1 + \sqrt{3}s\right) ds = \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\sqrt{3} \neq 0 \\ (y \mid x_2) = \displaystyle\int_0^1 s^2 \left(1 - \sqrt{3}s\right) ds = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}\sqrt{3} \neq 0 \end{cases}$$

ce qui signifie que $y \notin E_{\lambda_1}^{\perp}$ et $y \notin E_{\lambda_2}^{\perp}$. On déduit alors de **V.2.c.** que pour $\rho\lambda_1 = 1$ ou $\rho\lambda_2 = 1$ l'équation (4) n'a pas de solution dans E.

3. et 4. On a vue en **V.2.** que pour $\rho\lambda_1 \neq 1$ et $\rho\lambda_2 \neq 1$ l'équation (4) a pour unique solution :

$$x_0 = y + \frac{\lambda_1}{\gamma - \lambda_1} (y \mid \varepsilon_1) \varepsilon_1 + \frac{\lambda_2}{\gamma - \lambda_2} (y \mid \varepsilon_2) \varepsilon_2$$

avec $\gamma = \dfrac{1}{\rho}$ et :

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = \dfrac{1}{\|x_1\|} x_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2 + \sqrt{3}}} x_1, \\ \varepsilon_2 = \dfrac{1}{\|x_2\|} x_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2 - \sqrt{3}}} x_2, \end{cases}$$

soit :

$$\begin{aligned} x_0 &= y + \frac{\lambda_1}{\gamma - \lambda_1} \frac{(y \mid x_1)}{\|x_1\|^2} x_1 + \frac{\lambda_2}{\gamma - \lambda_2} \frac{(y \mid x_2)}{\|x_2\|^2} x_2 \\ &= y + \frac{9 + 4\sqrt{3}}{72} \frac{1}{\gamma - \lambda_1} x_1 + \frac{9 - 4\sqrt{3}}{72} \frac{1}{\gamma - \lambda_2} x_2. \end{aligned}$$

En écrivant que :

$$\begin{cases} 6(\gamma - \lambda_1) = \dfrac{1}{\rho} \left(6 - \left(2\sqrt{3} + 3\right) \rho\right) \\ 6(\gamma - \lambda_2) = \dfrac{1}{\rho} \left(6 + \left(2\sqrt{3} - 3\right) \rho\right) \\ \left(6 - \left(2\sqrt{3} + 3\right) \rho\right) \left(6 + \left(2\sqrt{3} - 3\right) \rho\right) = -3\left(\rho^2 + 12\rho - 12\right) \end{cases}$$

on a :

$$\begin{aligned} x_0(s) &= y - \frac{\rho \left(\left(9 + 4\sqrt{3}\right) \left(6 + \left(2\sqrt{3} - 3\right) \rho\right) x_1 + \left(9 - 4\sqrt{3}\right) \left(6 - \left(2\sqrt{3} + 3\right) \rho\right) x_2\right)}{72\left(\rho^2 + 12\rho - 12\right)} \\ &= s^2 + \frac{\rho(\rho - 18)}{6\left(\rho^2 + 12\rho - 12\right)} - \frac{\rho(\rho + 4)}{\rho^2 + 12\rho - 12} s. \end{aligned}$$

Une autre solution consiste à écrire que :

$$x_0(s) = y(s) + \beta_1 x_1(s) + \beta_2 x_2(s) = a + bs + s^2$$

avec :

$$\begin{cases} a = x_0(0) = \rho \displaystyle\int_0^1 s\left(a + bs + s^2\right) ds = \rho\left(\frac{a}{2} + \frac{b}{3} + \frac{1}{4}\right) \\ b = x_0'(0) = \rho \displaystyle\int_0^1 \left(a + bs + s^2\right) ds = \rho\left(a + \frac{b}{2} + \frac{1}{3}\right) \end{cases}$$

c'est-àdire que (a, b) est solution du système linéaire :

$$\begin{cases} (12 - 6\rho) a - 4\rho b = 3\rho \\ -6\rho a + (6 - 3\rho) b = 2\rho \end{cases}$$

ce qui donne :

$$\begin{cases} a = \dfrac{\rho(\rho - 18)}{6\left(\rho^2 + 12\rho - 12\right)}, \\ b = -\dfrac{\rho(\rho + 4)}{\rho^2 + 12\rho - 12}. \end{cases}$$